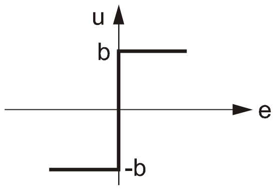
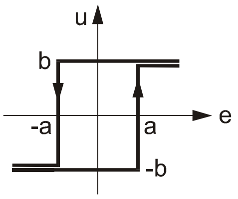
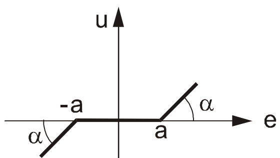
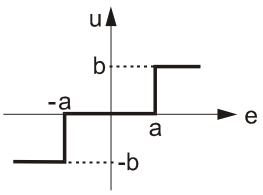
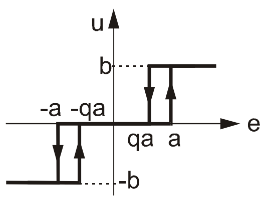
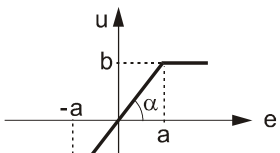
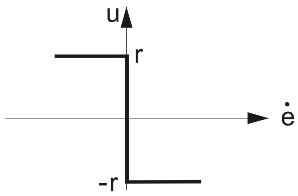
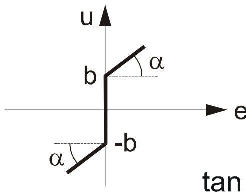
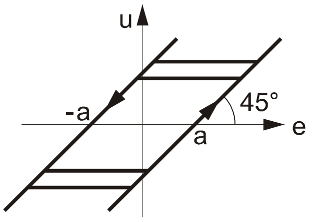
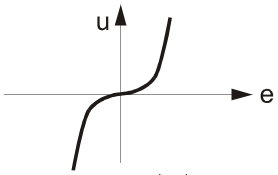
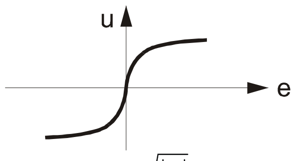
Formelsammlung zur Klausur

"Nichtlineare Regelungssysteme"

Zusammenstellung einiger Beschreibungsfunktionen:

Benennung der Nichtlinearität	Bild bzw. Gleichung Dabei: $e = A \sin \omega t$	Beschreibungsfunktion N(A)
Zweipunktglied		$\frac{4b}{\pi A}\,,\quad A > 0$
Zweipunktglied mit Hysterese		$\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} - j\,\frac{4ab}{\pi A^2}\,,\quad A \ge a$
Totzone	 $\tan\alpha = m$	$m\left[1-\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arc}\sin\frac{a}{A}-\frac{2}{\pi}\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\,,\quad A \ge a$ (*)
Dreipunktglied		$\frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\,,\quad A \ge a$
Dreipunktglied mit Hysterese		$\frac{2b}{\pi A}\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{qa}{A}\right)^2}\right]-j\,\frac{2ab(1-q)}{\pi A^2}\,,$ $A \ge a$
Begrenzung	 $\tan\alpha = m$	$m\,,\quad 0 \le A \le a$ $\frac{2m}{\pi}\left[\mathrm{Arc}\sin\frac{a}{A}+\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}\right]\,,\quad A \ge a$ (*)

Benennung der Nichtlinearität	Bild bzw. Gleichung Dabei: $e = A \sin \omega t$	Beschreibungsfunktion N(A)
Trockene Reibung		$-j\,\frac{4r}{\pi A}\ ,\ A > 0$
	 $\tan\alpha = m$	$\frac{4b}{\pi A} + m\ ,\quad A > 0$
Lose (Spiel)		$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arc}\sin\alpha + \alpha\sqrt{1-\alpha^2}\right] - j\,\frac{1}{\pi}\left(1-\alpha^2\right)$ $-1 < \alpha < 1\ ,\quad \alpha = 1 - \frac{2a}{A}$ (*)
	$u = e^3$	$\frac{3}{4}\,A^2$
	 $u = e\lvert e\rvert$	$\frac{8A}{3\pi}$
	 $u = \sqrt{\lvert e\rvert}\,\mathrm{sgn}\,e$	$\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{A}}\ ,\quad A > 0$

(*) $\mathrm{Arc}\sin\frac{a}{A}$: Hauptwert des $\arcsin\frac{a}{A}$ mit $0 \le \arcsin\frac{a}{A} \le \frac{\pi}{2}$

Beschreibungsfunktion:

$$N(A) \;=\; R(A) + jI(A)$$

mit: $$R(A) \;=\; \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(e,\ \dot{e}) \sin v \, dv \ ,$$

$$I(A) \;=\; \frac{1}{pA} \int_0^{2p} F(e,\ \dot{e}) \cos v \, dv \ ,$$

$$e \;=\; A \sin v \ , \quad \dot{e} = A\,\omega \cos v \ .$$

Popov-Kriterium:

Unter den Voraussetzungen

- $F(e)$ eindeutig, stückweise stetig, $F(0) = 0$,
- $0 \le \dfrac{F(e)}{e} \le K \ , \quad e \ne 0$,
- $L(s) = \dfrac{1}{s^p} \, \dfrac{1 + b_1 s + \ldots}{1 + a_1 s + \ldots}$ rational, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $ZG < NG$,
- Pole von $L(s)$ links oder allenfalls auf j-Achse,
- RK im singulären Fall grenzstabil,

ist der Regelkreis **absolut stabil** im Sektor $[0,\ K]$ bzw. $[\varepsilon,\ K]$, $0 < K < +\infty$, wenn sich eine reelle Zahl q finden lässt, für die

$$\mathrm{Re}\,\big[(1 + q\, j\omega)\, L(j\omega)\big] > -\frac{1}{K}$$

für alle $\omega \ge 0$ gilt.

Kriterium von Sylvester:

Die quadratische Form

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{P}\,\underline{x} = \sum_{i,k=1}^{n} p_{ik} x_i x_k \quad , \text{ mit } \quad \underline{P} = \underline{P}^T \quad , \quad \underline{P} = (p_{ik})$$

ist genau dann positiv definit, wenn alle "nordwestlichen" Unterdeterminanten, $D_1, \ldots, D_n$ von $\underline{P}$ positiv sind,

mit $\quad \underline{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad ,$

$$D_1 = p_{11} \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} , \ldots , \; D_n = |\underline{P}| \quad .$$

Reglersynthese durch Linearisierung und Entkopplung:

- System: $\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x}) + \underline{B}(\underline{x})\underline{u}$
  $\underline{y} = \underline{c}(\underline{x})$

- Regler: $\underline{u} = -\underline{r}(\underline{x}) + \underline{V}(\underline{x})\underline{w}$

  mit

  - $$\underline{r}(\underline{x}) = \underline{D}^{*-1}(\underline{x}) \cdot \begin{bmatrix} L_{\underline{a}}^{\delta_1} c_1(\underline{x}) + \sum_{\nu=0}^{\delta_1 - 1} q_{1\nu} L_{\underline{a}}^{\nu} c_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{a}}^{\delta_p} c_p(\underline{x}) + \sum_{\nu=0}^{\delta_p - 1} q_{p\nu} L_{\underline{a}}^{\nu} c_p(\underline{x}) \end{bmatrix},$$

  - $$\underline{V}(\underline{x}) = \underline{D}^{*-1}(\underline{x}) \cdot \begin{bmatrix} q_{10} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & q_{p0} \end{bmatrix},$$

  - $$\underline{D}^{*}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} L_{\underline{B}} L_{\underline{a}}^{\delta_1 - 1} c_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{B}} L_{\underline{a}}^{\delta_p - 1} c_p(\underline{x}) \end{bmatrix}.$$

  (Entkoppelbarkeitsbedingung: $\det \underline{D}^{*} \neq 0$)

Der Regler liefert p entkoppelte Teilsysteme mit

$$Y_i(s) = \frac{q_{i0}}{s^{\delta_i} + \cdots + q_{i1} s + q_{i0}} \cdot W_i(s), \quad (i = 1, \ldots, p).$$